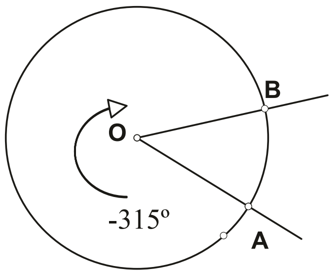
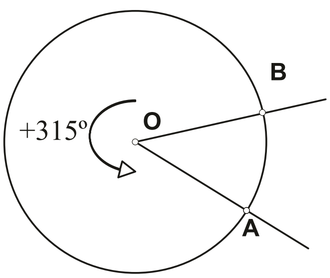
A semirreta OA é a semirreta origem do ângulo e o ângulo AOB passa a ser um ângulo orientado. Assim, a amplitude do ângulo é + 45º graus.

Exemplo:

- A amplitude do ângulo representado é de -315º



- A amplitude do ângulo representado é de +315º



A expressão α + k 360º (k € **Z),** dá-nos para cada número inteiro k, a amplitude de cada um desses ângulos.

De todas estas amplitudes a que pertence ao intervalo

] -180º, 180º [, diz-se a **determinação principal**.

Exemplo:

Em cada uma das alíneas seguintes representa-se uma amplitude de ângulo, indica a respetiva determinação principal:

a) 895º

895º= 2. 360º+ 175º

Donde a determinação principal é 175º

b)-990º

-990º = - 2. 360º - 270º

A determinação principal é 90º

Tarefa 10

Em cada uma das alíneas seguintes representa-se uma amplitude de ângulo, indica a respetiva determinação principal:

-220º

180º

-480º

1640º

3300º

-2520º

Tarefa 11

Sendo indicada, em cada uma das alíneas, uma amplitude de ângulo, procura em cada caso, se existir, um ângulo congruente pertencente ao conjunto [90º, 270º]:

-130º

-580º

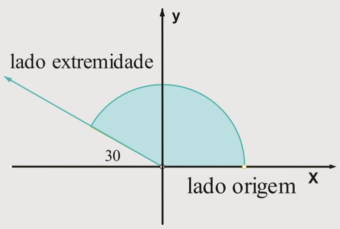
790º

1700º

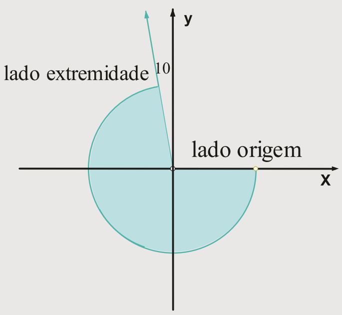
Nota

No eixo das ordenadas todos os pontos têm abcissa zero e no eixo das abcissas todos os pontos têm ordenada zero.

a) Observa que o ângulo do 2º quadrante tem amplitude positiva



b) Observa que o ângulo do 2º quadrante tem amplitude positiva



Dois ângulos dizem-se **congruentes** se têm a mesma determinação principal.

Ou seja, sendo α a amplitude de um deles e β a do outro, então existe k inteiro tal que se verifica, $\alpha - \beta = k.\ 360^o$, $(k \in \mathbb{Z})$

Exemplo:

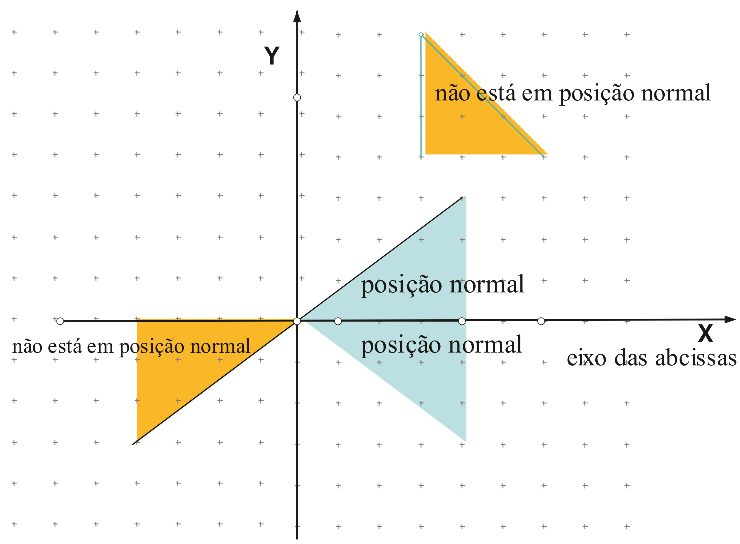
-130^o é congruente com 230^o, porque existe k=-1, tal que:

$-130^o - 230^o = -1 \times 360^o$

Ângulo em posição normal em relação a um sistema de eixos

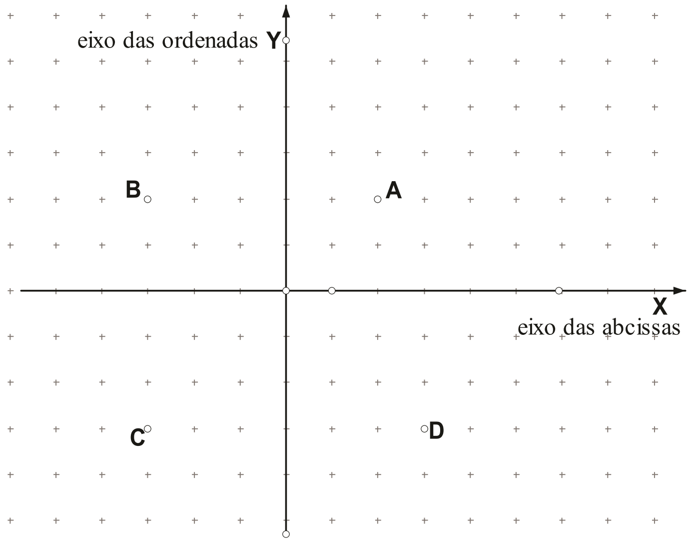
Quando é que eu devo dizer que um ângulo está em posição normal em relação a um sistema de eixos?

Considera a seguinte representação dos eixos coordenados:



Um ângulo está em **posição normal** relativamente a um sistema de eixos, quando o seu vértice coincide com a origem do sistema de eixos. O seu lado origem coincide com o semieixo positivo Ox.

Observa os seguintes pontos A (2, 2), B (-3, 2), C (-3, -3) e D (3, -3) marcados num sistema de eixos coordenados.



Tarefa 12

Representa:

a) Um ângulo negativo do 3º quadrante.

b) Um ângulo negativo do 4º quadrante.

c) Um ângulo negativo do 1º quadrante.

Questão: *Quais os quadrantes em que as abcissas são positivas?*

Resposta: As abcissas são positivas para a direita do eixo das ordenadas. Ou seja no 1º e 4º quadrantes.

Questão: *Quais os quadrantes em que as abcissas são negativas?*

Resposta: As abcissas são negativas para a esquerda do eixo das ordenadas. Ou seja no 2º e 3º quadrantes.

Questão: *Quais os quadrantes em que as ordenadas são positivas?*

Resposta: As ordenadas são positivas para cima do eixo das abcissas. Ou seja no 1º e 2º quadrantes.

Questão: *Quais os quadrantes em que as ordenadas são negativas?*

Resposta: As ordenadas são negativas para baixo do eixo das abcissas. Ou seja no 3º e 4º quadrantes.

Tarefa 13

Calcular no sistema sexagesimal as medidas dos ângulos que, em radianos, têm as seguintes medidas:

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

Um ângulo em posição normal diz-se do 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante conforme o seu lado extremidade está respetivamente no 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante.

Tarefa 14

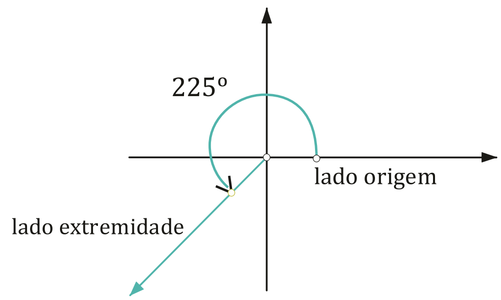
Determina os ângulos compreendidos entre -2π e 7π em que uma das determinações é o ângulo $\frac{5}{6}\pi$ (rad.).

Tarefa 15

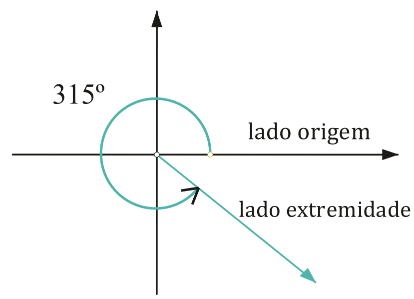
Exprima em radianos as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados.

Exemplo:

Ângulo do 3º quadrante

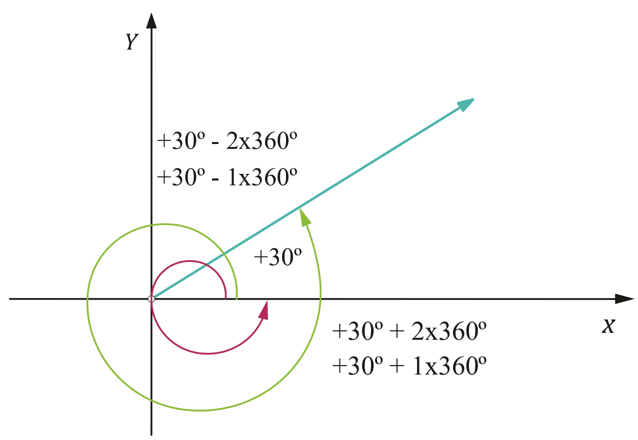


Ângulo do 4º quadrante



Expressão geral dos ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade

Representemos os ângulos de amplitudes,



Ou seja, os ângulos de amplitudes 30º+k.360º, com $k \in \mathbb{Z}$ têm todos o mesmo lado origem e mesmo lado extremidade.

Generalizando,

sendo α um ângulo orientado, os ângulos que têm o mesmo lado extremidade serão da forma: $\alpha + k\,360^o$, com $k \in \mathbb{Z}$

Medidas das amplitudes de ângulos e de arcos

A amplitude de um ângulo (arco) é a propriedade comum a todos os ângulos (arcos) congruentes.

Para medir amplitudes vamos considerar os seguintes sistemas de medida:

Sistema sexagesimal

Neste sistema a unidade fundamental é o grau.

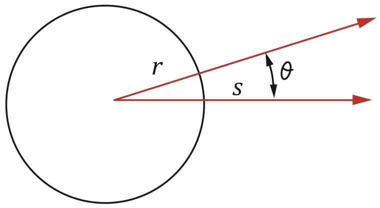
Considera-se um ângulo reto e divide-se em 90 partes iguais. Cada uma dessas partes (a nonagésima parte do ângulo reto) corresponde a um grau. Como submúltiplos temos:

- O minuto sexagesimal (1´) é 1/60 do grau.
- O segundo sexagesimal (1´´) é 1/60 do minuto e portanto 1/3600 do grau.

Sistema circular

No sistema circular a unidade de medida é o radiano.

O radiano (símbolo rad) é a razão entre o comprimento de um arco de circunferência e o seu raio.



Ou seja, a medida de um ângulo θ em radianos (figura) é o número de vezes que o raio como unidade de comprimento está contido no arco s subentendido pelo ângulo θ num círculo de raio r.

A razão entre duas grandezas da mesma espécie é, como já estudaste, o quociente entre as suas medidas referidas e uma unidade comum.

Então,

$$\theta(rad) = \frac{s}{r}$$

Sabendo que a medida de um radiano está para a medida de um ângulo de giro como o comprimento do arco $\widehat{AB}$ está para o comprimento da circunferência. Ou seja,

$$\frac{medida\ de\ radiano}{medida\ de\ \hat{a}ngulo\ de\ giro} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$$

Como a circunferência de raio r tem de comprimento 2πr, resulta que a circunferência contém exatamente 2π vezes o radiano de arco. Da relação anterior podemos escrever:

$\frac{1}{360º} = \frac{1}{2\pi(rad)}$. Ou seja, $360^o = 2\pi$ *(radianos)*

Assim, a semicircunferência, o quadrante e o octante medem (em radianos), respetivamente, π , $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4}$.

Exemplos:

1. Calcular no sistema sexagesimal a medida de $\frac{5}{6}\pi$ (radianos).

π (rad) ----------------- 180^o

$\frac{5}{6}\pi$ (rad) ---------------- x^o

Ou seja,

$$\frac{x}{180} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{\pi}$$

donde, $x = 150^o$.

2. Calcular no sistema circular a medida de 32^o.

π (rad) ------------------180^o

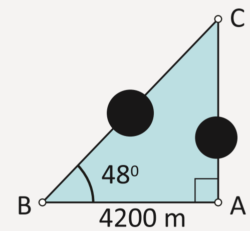
a (rad) ------------------ 32^o

$$180 \times a = \pi \times 32$$

$$a = \frac{\pi \times 32}{180} = \frac{8}{45}\pi(rad)$$

Exercícios e problemas

1. Dois obstáculos tornam inacessível o ponto C, tanto de B como de A.

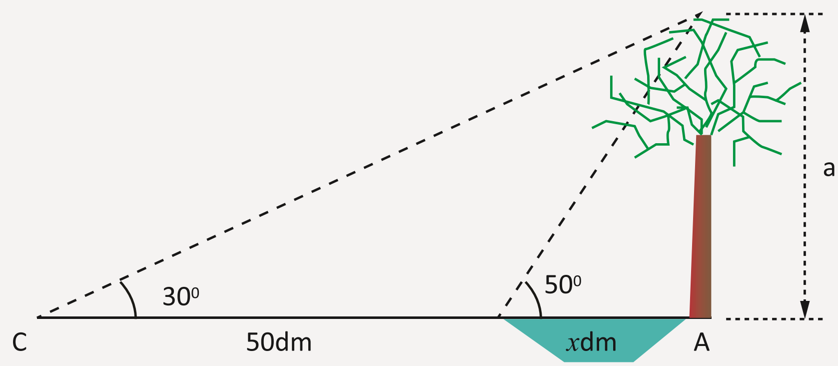


Sabendo que [AB] é perpendicular a [AC], calcular as distâncias que separam C de A e de B.

1.1 Calcular o comprimento de [AC].

1.2 Calcular o comprimento de [BC].

2. O Gilberto quer conhecer a largura de um rio e a altura de uma árvore junto a um rio.



Colocou-se na margem do rio, na posição O e mediu o ângulo de elevação do topo da árvore, 50º . Afastou-se 50 decímetros (dm) e na posição C mediu novamente o ângulo de elevação do topo da árvore, obtendo 30º (situação representada na figura anterior).

Determina o valor aproximado /(às unidades) para a largura do rio, no ponto onde se encontra o Gilberto e a altura da árvore.

3.Uma vela de um barco tem a forma de um triângulo retângulo. Sabe-se que um dos ângulos tem de amplitude 64º e uma das dimensões da vela é de 3 m (metros). Determina a área da vela.

4. Indica um valor aproximado d, por defeito, a menos de 10^{-2} de:

4.1 sen 10º   4.2 cos 55º   4.3 tg 87º   4.4 cotg 70º   4.5 cos30º

5. Representa um ângulo de amplitude α , ta que:

5.1 $sen\alpha = -\frac{1}{2} \wedge \cos\alpha < 0$

5.2 $tg\alpha = -\frac{1}{2} \wedge \cos\alpha > 0$

5.3 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge sen\alpha > 0$

Conteúdos

Definição de seno, coseno, tangente e cotangente de um ângulo orientado em posição normal

Sinais das funções circulares

Periodicidade das funções circulares

Expressão geral das amplitudes dos ângulos para os quais as razões trigonométricas tomam, valor máximo, valor mínimo e zero

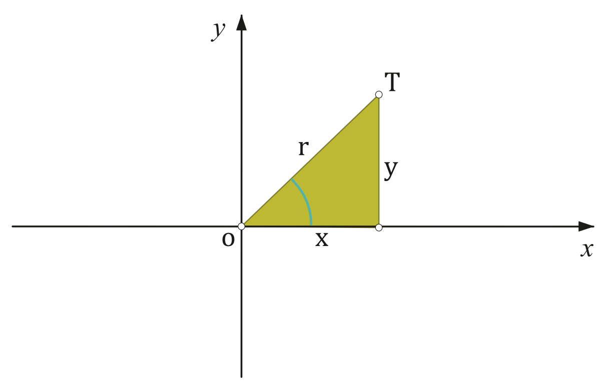
Subtema 2 - Relações trigonométricas

A trigonometria foi criada pelos matemáticos gregos para a resolução de triângulos. Porém, as funções trigonométricas resultantes, como veremos mais adiante, encontram aplicações mais vastas na matemática e em outras áreas, tais como, na Física (por exemplo, no estudo de fenómenos periódicos) ou nas Engenharias.

Definição de seno, coseno, tangente e cotangente de um ângulo orientado em posição normal

A maioria das aplicações trigonométricas relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo recorrendo às relações dependentes dos seus ângulos internos. Mais adiante, discutiremos a aplicabilidade (já sob o ponto de vista de funções reais de variável real) de algumas das seguintes relações trigonométricas.

Consideremos um sistema de eixos e um ângulo qualquer em situação normal



Consideremos um ponto T sobre o lado extremidade do ângulo de amplitude α. Este ponto tem uma determinada abcissa e uma determinada ordenada.

Questão: Quantas razões podem formar entre x, y e r?

Resposta: $\frac{y}{r}$; $\frac{x}{r}$; $\frac{y}{x}$; $\frac{x}{y}$; $\frac{r}{y}$; $\frac{r}{x}$;

a) $\frac{y}{r}$: **Seno -** É o quociente do comprimento do cateto *oposto* ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{y}{r}.$$

Nota que o seno de *α* pode aparecer com uma das seguintes representações: sen*α*, sin*α*, sen(*α*), sin(*α*).

b) $\frac{x}{r}$: **Coseno -** É o quociente do comprimento do cateto *adjacente* ao ângulo *α* pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{x}{r}.$$

O coseno de α aparece com uma das duas representações: cosα, cos(α).

c) $\frac{y}{x}$: **Tangente-** É o quociente dos comprimentos do cateto *oposto* pelo cateto *adjacente*, ou seja,

$$\tan(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}=\frac{y/r}{x/r}=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{x}=\frac{y}{x}.$$

É usual representar a tangente de a de uma das seguintes maneiras: tan*α*, tan(*α*), tg*α*, tg(*α*).

d) $\frac{x}{y}$: **Co-tangente -** É definida como o recíproco da tangente de *α*:

$$\operatorname{cotan}(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\frac{x}{y}=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}.$$

A co-tangente pode aparecer representada de uma das maneiras seguintes: cotan(*α*), cotg(*α*), cotan*α*, cotg*α*.

Pelas definições de tangente e de co-tangente, verificamos ainda que:

$$\tan(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

Tarefa 16

Considera um ângulo A em posição normal relativamente a um sistema de eixos coordenados retangulares.

Calcula os valores das razões trigonométricas do ângulo A, supondo que o ponto P(4, 3) é um ponto do seu lado extremidade, sendo

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

(pelo teorema de Pitágoras)

Tarefa 17

Resolve um problema parecido com o anterior, supondo que se trata de um ângulo β e que Q = ($\sqrt{3}$, -1) é um ponto do seu lado extremidade.

Nota

Podes utilizar tan(*α*) ou tg (*α*)

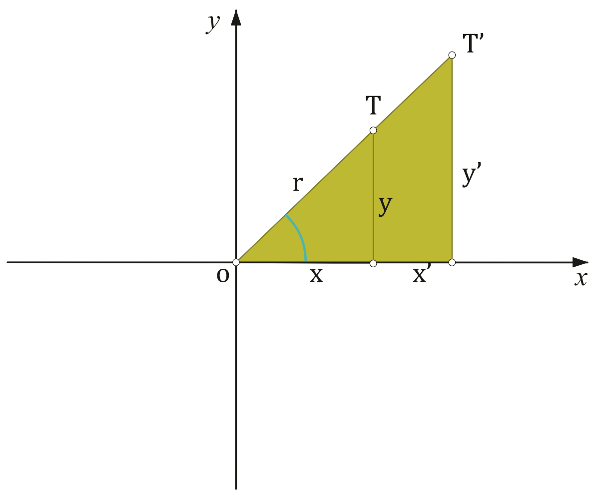
e) Definem-se ainda as razões trigonométricas: **Secante e Co-secante,** respetivamente:

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{r}{x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{r}{y}.$$

Neste subtema, estudaremos apenas as quatro primeiras razões.

Por outro lado, repara que, ainda que varie a posição do ponto T sobre o lado extremidade, o valor de cada razão não se altera, desde que não varie a posição do lado extremidade.

Isto deve-se à proporcionalidade dos valores em causa, devido à semelhança de triângulos.



Temos triângulos semelhantes, donde

$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'}$ e temos também

$x^2 + y^2 = r^2$

A todo o valor possível (qualquer ângulo para o qual exista a razão trigonométrica considerada) do ângulo α corresponde um e um só valor para cada uma das seis razões consideradas, as quais, por esta razão, são funções do ângulo α (são correspondências unívocas).

Tarefa 18

Sabendo que $sen\alpha = -\frac{1}{3}$ e que α é um ângulo do 3º quadrante, calcula os valores das restantes razões trigonométricas.

Tarefa 19

Calcula sen α e cos α, sabendo que $tg\alpha = \sqrt{8}$

(α pertence ao 3º quadrante)

Exemplo 1:

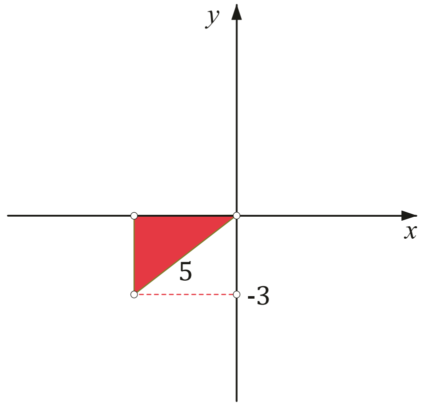
Sabendo que $sen\alpha = -\frac{3}{5}$ e que α ∈ 3º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Resolução:

$$sen\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{3}{5}$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + 3^2 = 5^2$$
$$x^2 + 9 = 25$$
$$x^2 = 16$$



x= 4 ou x =-4 (no 3º quadrante as abcissas são negativas)

Assim,

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5};\ tg\alpha = \frac{3}{4};\ \cot g\alpha = \frac{4}{3}$$

Exemplo 2:

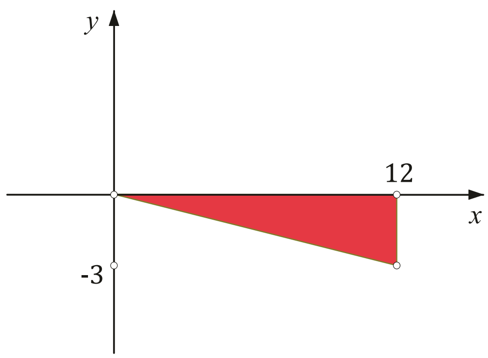
Sabendo que $tg\alpha = -\frac{5}{12}$ e que α ∈ 4º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Resolução:

$$5^2 + (12)^2 = r^2$$

$$25 + 144 = r^2$$

$$169 = r^2$$



r = +13 ou r = -13(o r não pode tomar valor negativo)

Donde,

r = +13

As restantes razões trigonométricas são: $\cot g\alpha = -\frac{12}{5};\ sen\alpha = -\frac{5}{13}$
$\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

Exemplo 3:

Sabendo que $\cos\alpha = -\frac{8}{10}$ e que α ∈ 2º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Tarefa 20

Se $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ e $sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a que quadrante pertence α?

Tarefa 21

Determina as funções trigonométricas do angulo β, sabendo que

$$sen\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e que

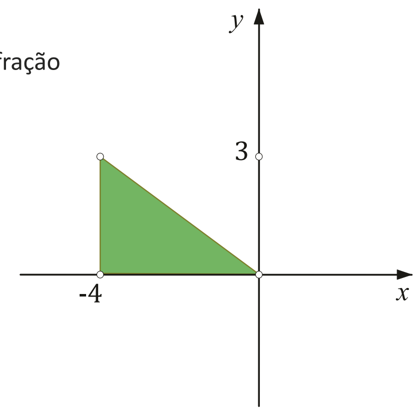
$$\cos\beta = -\frac{1}{2}$$

Resolução:

Comecemos por simplificar a fração

$-\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

Sendo $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$;



$4^2 + y^2 = 5^2$

$16 + y^2 = 25$

Donde y= 3 (Porquê?)

As restantes razões trigonométricas são:

$sen\alpha = \frac{3}{5}$; $\cot g\alpha = -\frac{3}{4}$; $tg\alpha = -\frac{4}{3}$

Tarefa 22

Quais são os ângulos, compreendidos entre $-\frac{3\pi}{2}rad$ e +3π rad, cujas funções circulares tenham, respetivamente, os mesmos valores que as do ângulo $\frac{5\pi}{6}rad$?

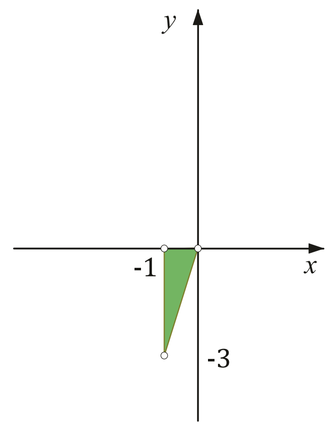
Exemplo 4:

Sabendo que $tg\alpha = -\frac{1}{3}$ e que α ∈ 3º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Resolução:

Por definição $tg\alpha = \frac{y}{x}$

y = -3 e x = -1



$1^2 + 3^2 = r^2$

$10 = r^2$

$r = \sqrt{10} \vee r = -\sqrt{10}$

Donde, $r = \sqrt{10}$

(porque r é positivo)

As restantes razões trigonométricas são:

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cot g\alpha = \frac{1}{3}$; $sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Tarefa 23

A que quadrantes pertencem os ângulos (supostos em posição normal):

a) 175º

b) $\frac{5}{3}$ π rad

c)-200º;

d) $-\frac{7\pi}{6}rad$

e) $-\frac{10}{3}$ ângulo reto

Considera a relação dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Se dividires ambos os membros desta igualdade por r^2 (possível, sendo *r* diferente de zero), obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Pela definição de seno e de coseno, temos:

$$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$$

E concluímos uma relação importante entre o seno e o coseno. Ou seja:

$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, para todo o ângulo **α**

Relação fundamental da trigonometria

Desta relação é ainda possível extrair outras relações trigonométricas importantes; por exemplo:

Dividindo por $\cos^2(\alpha)$, vem: $\tan^2(\alpha) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$;

ou, dividindo por $\text{sen}^2(\alpha)$, obtemos: $\text{cotan}^2(\alpha) + 1 = \dfrac{1}{\text{sen}^2(\alpha)}$.

Sinal das funções circulares

Na definição das razões trigonométricas, funções circulares, temos as coordenadas x e y de um ponto, qualquer, do lado extremidade do ângulo considerado e ainda temos r, a distância da origem das coordenadas a esse ponto.

Atendendo ao sinal que *x, y* e têm nos quatro quadrantes determinamos, nesses quadrantes, o sinal do seno, coseno, tangente e cotangente.

O seno é uma função ímpar, e como tal $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$.

O $\text{sen}\alpha > 0$ nos 1º e 2ª quadrantes e $\text{sen}\alpha < 0$ para α pertencente ao 3º e 4º quadrantes.

O coseno é uma função é par, isto é, para qualquer ângulo α verifica-se que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

No primeiro e no quarto quadrantes, $x>0$, logo $\cos(\alpha)>0$. No segundo e terceiro quadrantes, $x<0$ e, então, o $\cos(\alpha)<0$ para α pertencente a qualquer um destes dois quadrantes.

A tangente é uma função ímpar, ou seja, para qualquer ângulo α, verifica-

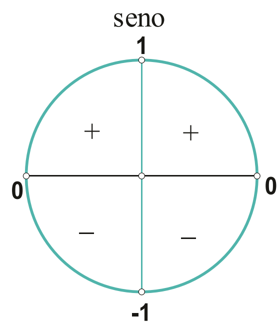
-se que: tan(–α) = –tan(α). Então, no primeiro quadrante $x>0$ e $y>0$, logo tan$\alpha>0$. No segundo quadrante, $x<0$ e $y<0$, o que faz tan$\alpha<0$. No terceiro, tem-se $x<0$ e $y<0$, portanto tan$\alpha>0$. Finalmente, no quarto quadrante, tan$\alpha<0$ porque $x>0$ mas $y<0$.

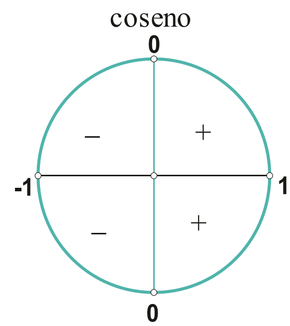
Nota

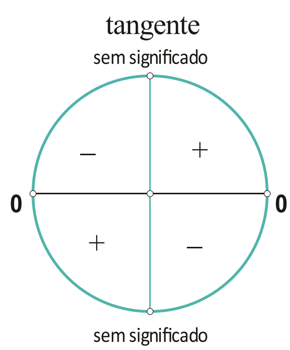
Para um ângulo α situado no 1ºQ, temos que o seno do ângulo -α, situado no 4ºQ, tem um valor simétrico e temos que o coseno do ângulo -α, situado no 4ºQ, tem o mesmo valor.

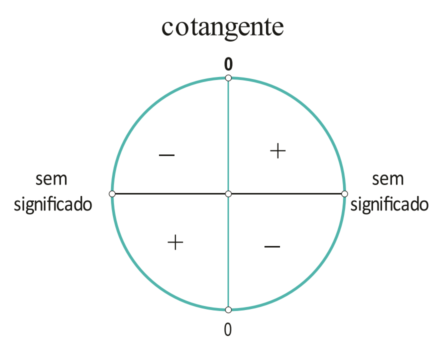
A cotangente é também ímpar e tem o mesmo sinal da função tangente

Em resumo,









Nota

O seno é positivo nos quadrantes em que a ordenada é positiva.

O coseno é positivo nos quadrantes em que a abcissa é positiva.

No quadro também se apresenta-se uma síntese do estudo de sinal das funções circulares:

Quadrantes	Seno	coseno	Tangente	Cotangente
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

"+": Positivo ; "-": Negativo

Periodicidade das funções circulares

Consideremos um ângulo α qualquer, se adicionarmos a este ângulo, um, dois, três, ou mais ângulos de giro, obteremos novos ângulos contidos na expressão, $\alpha + k.360^o$, com $k \in Z$ ou $\alpha + k.2\pi$, com $k \in Z$

Os ângulos obtidos têm o mesmo lado extremidade que o ângulo α, donde resulta que as razões trigonométricas (funções circulares) de tais ângulos têm os mesmos valores que as do ângulo α.

Assim, temos (com $k \in Z$),

- $sen\ (\alpha + k.360^o)= sen(\alpha + 2k.\pi) = sen\ \alpha$
- $cos\ (\alpha + k.360^o)= cos\ (\alpha + 2k.\pi) = cos\ \alpha$
- $tg\ (\alpha + k.360^o)= tg\ (\alpha + 2k.\pi) = tg\ \alpha$
- $cotg\ (\alpha + k.360^o)= cotg\ (\alpha + 2k.\pi) = cotg\ \alpha$

Todas as funções circulares são periódicas e admitem como período 360^o (ou 2π radianos).

No caso da tangente a a cotangente admitem como período 180^o (ou π radianos).

Nota

Uma função é periódica se existe um número *P>0* tal *que f(x+P)= f(x).*

Exemplo:

$sen\ 819^o= sen\ (99^o+.2 \times 360^o) = sen\ 99^o$

O período da tangente e da cotangente é 180^o (ou π radianos).

Ou seja,

$tg\ (\alpha + k.180^o)= tg\ (\alpha + k.\pi)= tg\ \alpha$

$cotg\ (\alpha + k.180^o)= cotg\ (\alpha + k.\pi)= cotg\ \alpha$, com $k \in Z$.

Funções circulares de ângulos: 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º

Estudaste anteriormente que existem alguns ângulos do primeiro quadrante para os quais é possível determinar quais os valores exatos das funções trigonométricas.

Para ângulos de outros quadrantes, podemos fazer uma **redução ao primeiro quadrante**. Nos restantes ângulos, cuja redução ao primeiro quadrante (discutida mais adiante) não devolve um destes ângulos particulares, é necessário recorrer a tabelas trigonométricas ou uma calculadora científica.

Tarefa 24

Sabendo que $tg\alpha = \frac{3}{4}$ e que $\alpha \in 3º$ quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Tarefa 25

Sendo β do 2º quadrante e

$$\cot g\beta = -\frac{15}{8}$$

determina:

a) $sen\beta$

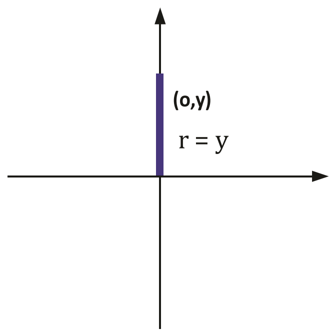
b) $\frac{1}{\cos^2\beta} - 1$

Exemplo:

Estuda as razões trigonométricas de um ângulo, sabendo que o seu lado extremidade coincide com um dos semi-eixos.

Resolução:

Este ângulo α a que nos estamos a referir é da forma



$sen 90^0 = 1$

$\cos 90^0 = 0$

$tg 90^0$ (sem significado)

$\cot g 90^0 = 0$

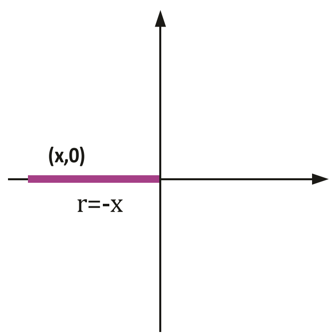
$\alpha = 90^0 + k.360^0, k \in Z$

$sen\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$

$tg\alpha = \frac{y}{x}$ ($\frac{y}{0}$ sem significado)

$\cot g\alpha = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$



$sen 180^0 = 0$

$\cos 180^0 = -1$

$tg 180^0 = 0$

$\cot g 180^0$ (sem significado)

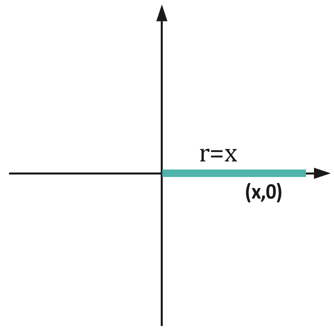
$\alpha = 180^0 + k.360^0, k \in Z$

$sen\alpha = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{-x} = -1$

$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$

$\cot g\alpha = \frac{x}{y}$ ($\frac{x}{0}$ sem significado)



$$sen360^0 = sen0^0 = 0$$

$$\cos 360^0 = \cos 0^0 = 1$$

$$tg360^0 = tg0^0 = 0$$

$\cot g360^0 = \cot g0^0$ (sem significado)

$$\alpha = 0^0 + k.360^0, k \in Z$$

$$sen\alpha = \frac{y}{r} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{0}{-y} = 0$$

$tg\alpha = \frac{y}{x}$ ($\frac{y}{0}$ sem significado)

$$tg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$$

Exemplo:

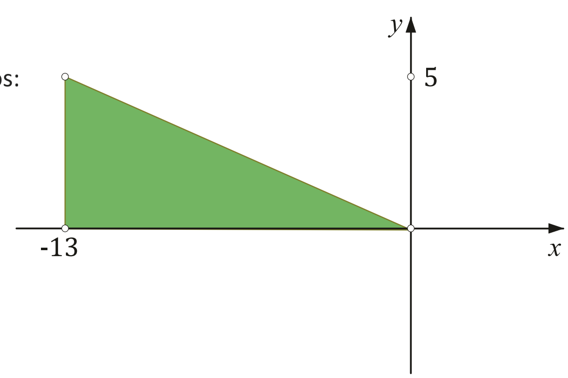
Sabendo que tg α = $-\frac{5}{13}$ e que α ∈ 2º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de α

a) Pela definição;

b) Através de relações entre seno, coseno, tangente e cotangente.

Resolução:

Pela definição, temos:



tg α = $\frac{y}{x} = -\frac{5}{13}$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$13^2 + 5^2 = r^2$$

$$169 + 25 = r^2$$

$r = \sqrt{194}$

Então,

sen α = $\frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{194}}$

cos α = $\frac{x}{r} = -\frac{13}{\sqrt{194}}$

cotg α = $-\frac{13}{5}$

Tarefa 26

Indica quais das seguintes igualdades são possíveis:

a) $2\cos x = -3$

b) $\sqrt{3}senx - 1 = 0$

c) $tgx = -\frac{1}{3}$

d) $\cot gx + 217 = 0$

Através das relações trigonométricas

$$(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 = 1$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Sendo tg α = $-\frac{5}{13}$, podemos escrever,

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{5}{13} \\ \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ \cos^2\alpha + (-\frac{5}{13}\cos\alpha)^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ 169\cos^2\alpha + 25\cos^2\alpha = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ 194\cos^2\alpha = 169 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{169}{194}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = -\frac{5}{13}\cos\alpha \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{169}{194}} \end{cases}$$

Donde se conclui que cos α = $-\frac{13}{\sqrt{194}} = \frac{13\sqrt{194}}{194}$, visto que α ∈ 2º quadrante.

Exemplo:

Determinar sen α – 5 cos α sendo tg α = $\frac{12}{5}$ e α ∈ 3º quadrante.

Se tg α = $\frac{12}{5}$, então $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$ ou seja sen α = $\frac{12}{5}$ cos α

Utilizando a lei fundamental da trigonometria, temos

$$(\frac{12}{5}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{169}{25}\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{169} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13} \vee \cos\alpha = -\frac{5}{13}$$

Dado que α é do 3º quadrante a solução é $-\frac{5}{13}$

Assim cos α = $-\frac{5}{13}$ e temos que senα = $\frac{12}{5}\times(-\frac{5}{13})$

Ou seja senα = $-\frac{12}{13}$

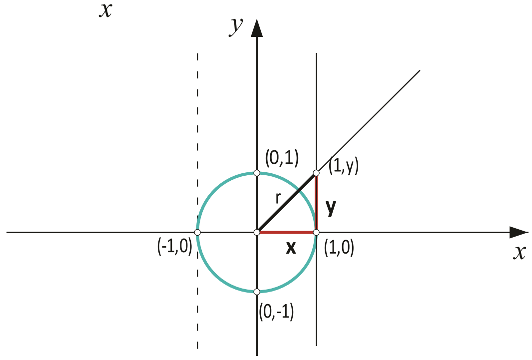
Então,

senα – 5 cos α = $-\frac{12}{13} - 5\times(-\frac{5}{13}) = -\frac{12}{13} + \frac{25}{13} = 1$

Expressão geral das amplitudes dos ângulos para os quais as razões trigonométricas tomam, valor máximo, valor mínimo e zero.

Ângulos no 1º e 4º quadrante

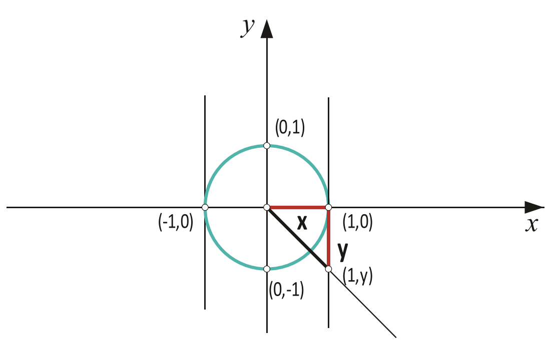
Sabendo que tg α = $\frac{y}{x}$, e sendo x =1, temos que tg α = y



No 1º quadrante a tangente cresce de 0 a $+\infty$.

Questão: Quando o ângulo α se aproxima de 90º, como variará a tangente?

Para valores que se aproximam de 90º, a tangente cresce indefenidamente.



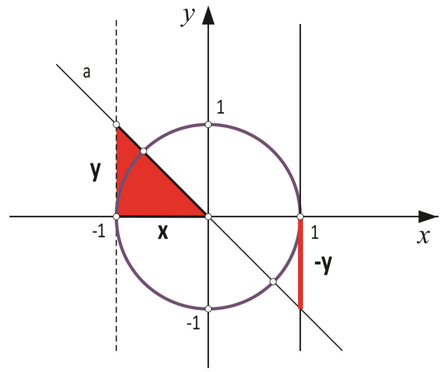
No 4º quadrante a tangente decresce de 0 a $-\infty$.

Questão: quando o ângulo α, se aproxima de -90º, como variará a tg?

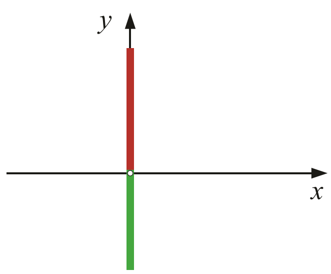
A tangente, neste caso, decresce indefinidamente.

Ângulos no 2º e 3º quadrantes

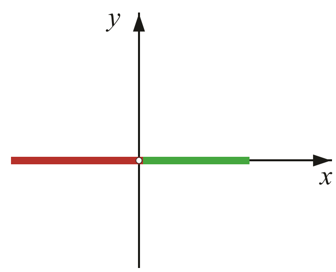
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{y}{x} = -y$



As amplitudes dos ângulos com os lados extremidades nas posições assinaladas das figuras seguintes, são dadas pelas expressões, $90^o + k.180^o$, com $k \in Z$ e $k.180^o$, com $k \in Z$.



$90^o + k.180^o,\ k \in Z$



$k.180^o,\ k \in Z$

Seno

a) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o seno tem valor máximo: $\text{sen}\ \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 90^o + k.360^o,\ k \in Z$

b) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o seno tem valor mínimo: $\text{sen}\ \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -90^o + k.360^o,\ k \in Z$

c) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o seno tem valor zero: $\text{sen}\ \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k.180^o,\ k \in Z$

Coseno

d) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o coseno tem valor máximo: $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k.360^o,\ k \in Z$

e) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o coseno tem valor mínimo: $\cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 180^o + k.360^o,\ k \in Z$

f) A expressão geral das amplitudes dos ângulos, para os quais o coseno tem valor zero: $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^o + k.180^o,\ k \in Z$

Aplicações à resolução de condições

Exemplo:

Resolver a equação:

sen(2x + 180º) = 1

sen(2x + 180º) = 1 $\Leftrightarrow$ 2x + 180º = 90º + k.360º $\Leftrightarrow$ 2x = -90º + k.360º $\Leftrightarrow$

x = - 45º+ k.180º, k $\in$ Z

Exemplos:

1. Determina m de modo que $\frac{m-1}{2}$ represente o valor do seno de um ângulo do 3º quadrante.

2. Resolve, no conjunto das amplitudes, as equações:

a) $3\cos(2x+180^0)+3=0$

b) $2+\cos(x+180^0)=2$

c) $\frac{2\text{sen}(x+90^0)+2}{2}=2$

d) $\cos\,(3x) = \text{sen}\ 720^0$

3. Sabendo que que tg α = $\frac{5}{12}$ e que cos α < 0, determina as respetivas razões trigonométricas

a) Pela definição;

b) Através de relações entre seno, coseno, tangente e cotangente.

4. Determina k de modo que $\frac{k-1}{k+1}$, represente o valor de coseno de um ângulo do 4º quadrante.

Resolução:

1) sen α= $\frac{m-1}{2}$

$$\begin{cases} \frac{m-1}{2} > -1 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > -1 \\ m < 1 \end{cases}$$

Tarefa 27

Determine m de modo que $\frac{2m-1}{3}$ represente o seno de um ângulo do 3º quadrante.

2)

a) $3\cos(2x+180^0)+3=0$

$3\cos(2x+180^0)=-3$

$\cos(2x+180^0)=-1$

$2x+180^0=180^0+k.180^0, k\in Z$

$x=90^0 k, k\in Z$

b) $2+\cos(x+180^0)=2$

$\cos(x+180^0)=0$

$x+180^0=90^0+k.180^0$

$x=-90^0+k.180^0, k\in Z$

c) $\frac{2\text{sen}(x+90^0)+2}{2}=2 \Leftrightarrow 2\ \text{sen}(x+90^o)+2=4 \Leftrightarrow 2\ \text{sen}(x+90^o)=2$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x+90^o)=1 \Leftrightarrow x+90^o=90^o+k.360^o, k\in Z \Leftrightarrow x=k.360^o, k\in Z$

d) cos (3x) = sen 720º

720º : 360º= 2 (resto zero)

Nota

Divide-se 720º por 360º e toma-se o resto.

cos 1000º = cos 280º

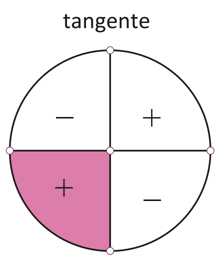
1000: 360 = 2 e resto 280

Então,

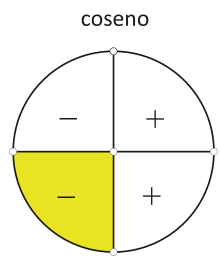
cos (3x) = sen 720º $\Leftrightarrow$ cos (3x) = sen 0º $\Leftrightarrow$ cos (3x) = 0 $\Leftrightarrow$ 3x = 90º+ k.180º

x = 30º+ k.60º, k $\in$ Z

3)



$\alpha \in$ 3º quadrante



$\alpha \in$ 3º quadrante

a) x = -12 , y = -5

$(-12)^2 + (-5)^2 = r^2$

$169 = r^2 \Leftrightarrow r=13 \vee r=-13$

13 = r (r não pode ser negativo, porque representa uma medida)

cos α= $-\frac{12}{13}$

sen α= $-\frac{5}{13}$

cotg α= $\frac{12}{5}$

b)

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = \frac{5}{12}\cos\alpha \\ 25\cos^2\alpha + 144\cos^2\alpha = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \\ 169\cos^2\alpha = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \\ \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\alpha = \frac{5}{12} \times (-\frac{12}{13}) \\ \cos\alpha = -\frac{12}{13} (\alpha \in 3^{\text{o}}\, quadrante) \end{cases}$$

sen α = $-\frac{5}{13}$; cotg α = $\frac{1}{tg\alpha}$ = $\frac{12}{5}$

4) k = ?

cos α $\frac{\text{k - 1}}{\text{k} + 1}$>0

$$\begin{cases} \frac{\text{k}-1}{\text{k}+1} > 0 \\ \frac{\text{k}-1}{\text{k}+1} < 1 \end{cases}$$

$$\frac{\text{k}-1}{\text{k}+1} > 0$$

Tarefa 28

Sabendo que $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ e que α pertence ao quadrante em que o seno é crescente e o coseno é crescente, determina as restantes razões trigonométricas de α.

Tarefa 29

O angulo x pertence ao intervalo

$\left]180^0, 270^0\right[$ e cos x= $\dfrac{1+2m}{2}$.

Quais são os valores possíveis de m?

K		-1		1	
k-1	–	–	–	0	+
k +1	–	0	+	+	+
$\frac{k-1}{k+1}$	+	s.s.	–	0	+

k ∈] - ∞, -1[∪]1, +∞[

$\dfrac{k-1}{k+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{k-1}{k+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{k+1} < 0 \Leftrightarrow k+1>0 \Leftrightarrow k>-1$

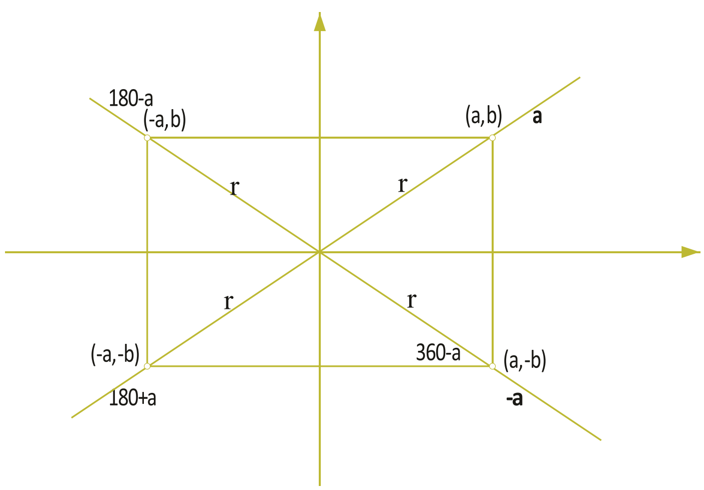
k ∈]-1, +∞[

A solução do sistema

$\begin{cases} \dfrac{k-1}{k+1} > 0 \\ \dfrac{k-1}{k+1} < 1 \end{cases}$ **k ∈]1, +∞[**

Redução ao primeiro quadrante

Consideremos α um ângulo do 1º quadrante



sen α = $\dfrac{b}{r}$ **(Referência)**

sen (180° - α)= $\dfrac{b}{r}$ **= sen α**

sen(180° + α)= $-\dfrac{b}{r}$ **= - sen α**

sen (-α) = $-\dfrac{b}{r}$ **= - sen α**

sen(360° - α)= $-\dfrac{b}{r}$ **= - sen α**

Nota

Ângulos associados

Dizemos que dois ângulos α e β são ângulos associados quando as funções circulares de um deles são, em valor absoluto, iguais as funções circulares homónimas do outro.

Dado um ângulo orientado em posição normal do 1º quadrante, existem mais três ângulos (um em cada um dos quadrantes) que são associados do referido ângulo.

$$\textbf{cos } \alpha = \frac{a}{r} \textbf{ (Referência)}$$

$$\cos(180^o - \alpha) = -\frac{a}{r} = \mathbf{-cos\ \alpha}$$

$$\cos(180^o + \alpha) = -\frac{a}{r} = \mathbf{-cos\ \alpha}$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{a}{r} = \mathbf{cos\ \alpha}$$

$$\cos(360^o - \alpha) = \frac{a}{r} = \mathbf{cos\ \alpha}$$

$$\textbf{tg } \alpha = \frac{b}{a} \textbf{ (Referência)}$$

$$\mathrm{tg}(180^o - \alpha) = -\frac{b}{a} = \mathbf{-\ tg\ \alpha}$$

$$\mathrm{tg}(180^o + \alpha) = \frac{b}{a} = \mathbf{tg\ \alpha}$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\frac{b}{a} = \mathbf{-\ tg\ \alpha}$$

$$\mathrm{tg}(360^o - \alpha) = -\frac{b}{a} = \mathbf{-\ tg\ \alpha}$$

Nota

Podes confirmar os mesmos resultados para α pertencente ao 2º, ou 3º ou 4º quadrante.

O problema da redução de um ângulo ao 1º quadrante consiste em determinar um ângulo positivo do 1º quadrante cujas funções circulares tenham, em valor absoluto, valores iguais ao das funções com o mesmo nome do ângulo dado.

Se o ângulo considerado excede um ângulo de giro, a periodicidade das funções permite reduzi-lo a um ângulo menor do que um ângulo de giro e, se excluirmos o caso de o ângulo assim obtido ser do 1º quadrante, três casos são possíveis:

a) Se o ângulo obtido é do 2º quadrante, reduz-se ao primeiro por intermédio das relações.

   sen $(180^o - a)$= **sen a**

   cos $(180^o - a)$= **-cos a**

   tg $(180^o - a)$= **-tg a**

   cotg $(180^o - a)$= **-cotg a**

Nota

Relativamente aos ângulos α e $(180^o - \alpha)$ os respetivos:

- senos são iguais
- cosenos são simétricos
- tangentes são simétricas
- cotangentes são simétricas

b) Se o ângulo obtido é do 3º quadrante, reduz-se ao primeiro por intermédio das relações.

   sen $(180^o + a)$= **-sen a**

   cos $(180^o + a)$= **-cos a**

   tg $(180^o + a)$= **tg a**

   cotg $(180^o + a)$= **-cotg a**

Nota

Relativamente aos ângulos α e $(180^o + \alpha)$ os respetivos:

- senos são iguais
- cosenos são simétricos
- tangentes são iguais
- cotangentes são iguais

Nota

Relativamente aos ângulos α e (360º - α) os respetivos:

- senos são simétricos
- cosenos são iguais
- tangentes são simétricas
- cotangentes são simétricas

c) Se o ângulo obtido é do 4º quadrante, reduz-se ao primeiro por intermédio das relações.

sen (360º - a)= - **sen a**

cos (360º - a)= **cos a**

tg (360º - a)= **-tg a**

cotg (360º - a)= **-cotg a**

Exemplo:

sen 2310º = sen (150º + 6 x 360º) = sen 150º

sen 150º = sen (180º - 30º) = sen 30º

$$sen(180^0 + \alpha) = -sen\alpha$$
$$\cos(7.180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(-180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

Nota

1º) Se o argumento varia um número par de π (de 180º) nenhuma razão (função) varia.

2º) Se o argumento varia um número ímpar de π (de 180º) a tangente e a cotangente mantêm o valor e o seno e coseno mudam de sinal.

3º) Ângulos simétricos têm os cosenos iguais; senos, tangentes e cotangentes simétricos.

Exemplo:

Dispondo de uma tabela de valores naturais como a do fim do livro. Determina valores aproximados de sen835º de tg 835º e de - sen835º

1) Redução ao 1º quadrante

sen835º = sen (115º + 2. 360º) = sen 115º = sen (180º - 65º) = sen 65º

Determinação de sen 65º, recurso a tabela,

<table>
<tr><td rowspan="5">0,9063</td><td>...</td></tr>
<tr><td>66^0</td></tr>
<tr><td>65^0</td></tr>
<tr><td>64^0</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
</table>

Então

sen835º = sen 65º ≈ *0,9063*

tg 835º

tg 835º = tg (115º + 4. 180º) = tg 115º = tg (180º- 65º) = tg 65º

Determinação de tg 65º (consultar tabela)

2,145	…
	66^0
	65^0
	64^0
	…

Então

tg 835º = tg 65º ≈ 2,145

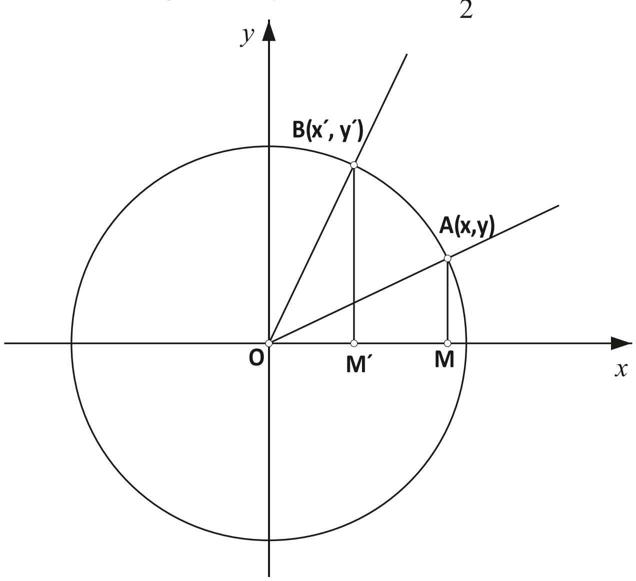
Dispondo de uma calculadora científica, para determinar um valor aproximado de de sen835º, a calculadora deverá estar ligada para o MODO GRAUS (usualmente é D)

Introduz-se no visor a amplitude 835º e, seguidamente, pressiona-se a tecla sen obtendo-se no visor **0,9063…**

Apresenta-se, como exemplo, uma imagem de uma calculadora científica que podes utilizar

Funções de ângulos complementares

Consideremos dois ângulos complementares α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$.



Os triângulos [OMA] e [OM´B] são iguais e consequentemente x´= y e y´= x (lados homólogos).

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \text{sen}\ \alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \text{cotg}\ \alpha$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = \text{tg}\ \alpha$$

Tarefa 30

Determina o conjunto solução de cada uma das seguintes equações trigonométricas:

a) $2 \,.\, sen\, x + \sqrt{2} = 0$;

b) $cos\, x + 1 = 2$;

c) $tg\, x = tg\ (-\ 40^{o})$;

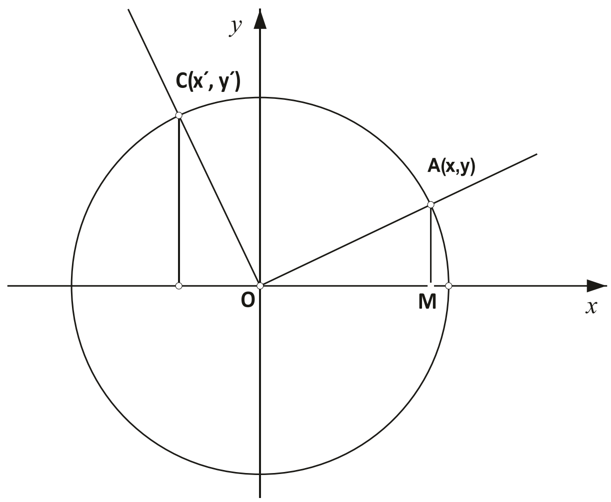
d) $2 senx = \sqrt{3}$;

e) $\sqrt{2} \,.\, cos\, x\ \text{-}2 = \text{-}1$;

f) $sen\, x = sen\ 190^{o}$;

g) $2\ cos\, x + \sqrt{3} = 0$;

h) $cotg\, x = cotg\ 130^{o}$.



$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\text{sen}\ \alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y} = -\ \text{cotg}\ \alpha$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = -\text{tg}\ \alpha$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{y'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\text{sen}\ \alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \text{cotg}\ \alpha$$

$$\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$$

Tarefa 31

Exprime em função do ângulo α:

a) $sen(\alpha - \frac{\pi}{2})$

b) $\cos(-\pi + \alpha)$

c) $sen(-\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

d) $tg(720^{0} - \alpha)$

Exercícios e problemas

1. Reduz ao 1º quadrante:

a) $sen130^0$; b) $\cos 197^0$; c) $tg325^0$; d) $sen(-200^0)$; e) $\cos(-680^0)$; f) $\cot g(-1675^0)$

2. Calcula os valores de:

a) $sen0^0 + 2\cos 0^0 + 3sen90^0$

b) $sen180^0 + 2\cos 180^0 + 3sen270^0$

3. Calcula o valor de:

$$sen\frac{3\pi}{2} - 2\cos 7\pi + 3tg\ 3\pi - 2sen(-5\pi) + 3tg\ (-7\pi) + 2\cos(5\pi)$$

4. Simplifica:

a) $sen(90^0 + \alpha) + \cos(180^0 + \alpha) - \cos(270^0 - \alpha) + sen(360^0 + \alpha)$

b) $5tg(3\pi + \alpha) - 4tg(\alpha - 5\pi) + 3tg(\frac{5\pi}{2} - \alpha) - \cot g(\alpha - 2\pi)$

c) $3sen(\alpha - \frac{3\pi}{2}) - 2\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) - 2tg(\alpha - 5\pi) + 2\cot g(-\alpha - \frac{\pi}{2})$

d) $\dfrac{tg(-270^0 + \alpha)\cos(270^0 - \alpha)\cos(360^0 - \alpha)}{\cot g(180^0 + \alpha)sen(270^0 + \alpha)} - sen(\alpha - 180^0)$

5. Determina expressões mais simples equivalentes às dadas:

a) $sen(90^0 + x) + \cos(180^0 + x) + senx - \cos(270^0 - x)$

b) $\cos(x + 90^0) \times \cos(180^0 - x) + sen(x + 90^0) \times sen(x + 180^0)$

c) $3sen(x - 270^0) - 2\cos(x + 90^0) - tg(x - 90^0) + 2\cot g(-x - 90^0)$

d) $5tg(3\pi + x) - 2sen(x - 3\pi) - 5\cot g(\frac{3\pi}{2} - x) - \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$

e) $sen(\frac{\pi}{2} + x) + sen(\pi - x) + sen(\frac{3\pi}{2} + x) + sen(2\pi + x)$

f) $\cos(810^0 - x) - sen(90^0 + x) + sen(x + 810^0) - sen(630^0 + x)$

6. Sendo $\cos(x - \frac{3\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ determina:

a) $sen(5\pi + x) - \cos(\frac{5\pi}{2} + x)$

b) $tg(\frac{3\pi}{2} - x) + 2\cot gx$

Conteúdos

Definição das funções trigonométricas (seno, coseno, tangente e cotangente)

Representação gráfica

Monotonia

Variação de sinal

Modelação e trigonometria

Subtema 3 - Funções circulares diretas: Generalidades

Definição das funções trigonométricas

Seno

A cada número real x corresponde um e um só número real sen x, tratando-se de uma correspondência unívoca.

Assim, define-se a função real de variável real *f*, tal que:

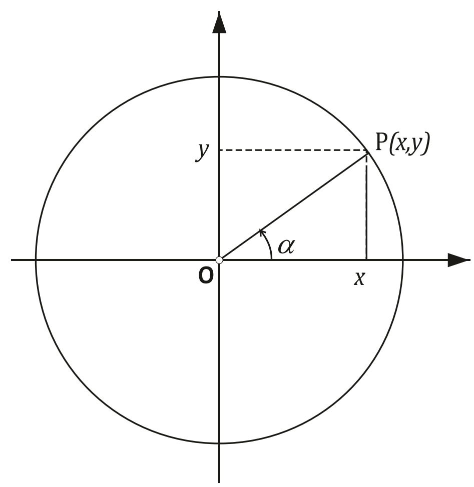
$$f : IR \to [-1,1]$$
$$x \mapsto f(x) = sen(x)$$

De **domínio** R e **contradomínio** [1, 1].

Vimos anteriormente que $sen(x) = sen(-x)$, qualquer que seja o valor de x. Donde, podemos afirmar que a função seno é uma função ímpar, logo o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

Monotonia

Consideremos um círculo trigonométrico de centro na origem das coordenadas e um ponto P, ponto de encontro do lado extremidade do ângulo x com a circunferência do círculo trigonométrico.



Para o estudo da variação da função seno, devemos observar a variação